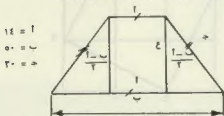


بدأ علماء المسلمين بدراسة هندسة الأغرقيق دراسة مستغضة قبل أن يقوموا بتعميم بعض النظريات الهندسية، وإقامة براهين مبتكرة على البعض الآخر، ونشير هنا بوجه خاص إلى تعميم نظرية فيثاغورث، وإلى علماء المسلمين فيما يختص بفرضية التوازي أو المصادر الحامسة من مصادرات اقليدس، واستخدام الجبر في تعيين مساحات الأشكال وحجوم الأجسام. هذه شحة سريعة لا تعدو كونها إشارة فحسب إلى بعض فضل علماء المسلمين في مجال الهندسة.

تعميم نظرية فيثاغورث لأي مثلث :

ورد في كتاب «موجز تاريخ الرياضيات» هشام الطيار ونجى عبد سعيد: «إن قدماء المصريين استطاعوا بطريقة بسط الجبل وتقسيمه بواسطة عقد بنسبة ٣ : ٤ : ٥ رسم زوايا قائم واستخدام هذه الفكرة على شكل مثلث قائم الزاوية في بنائهم أهرامات الجيزة الثلاثة المعروفة في مصر. أما البابليون فقد عرفوا قياس مساحة المستطيلات، والمثلثات المتساوية الساقين، والقائمة الزاوية، وشبه المنحرف، وظهر من ذلك نظرية فيثاغورث تماماً، وقد وجد مكومت (R. de Mecguenem) ألواحاً من الطين في عام ١٩٣٤م بمدينة سوس، فضلاً عما ظهر في كتابات أرشميدس وهيرون وديوفانتوس، وهي توضح أن البابليين استطاعوا إيجاد مساحة حقل على شكل شبه منحرف، بمعرفة قيمة الضلعين المتوازيين والضلعين الآخرين المتساويين كما في شكل (٣٨).



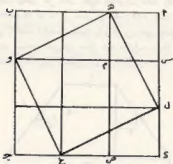
شكل (٣٨) - إيجاد مساحة شبه المنحرف متساوي الساقين .

$$22 = 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \times 100 = 200\sqrt{2} = 200 \left(\frac{24}{25} \right) = 2(20) = 2 \left(\frac{1}{2} \times 20 \right) = 20 = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{مساحة شبه المنحرف} = 2 \left(\frac{20 \times 1}{2} \right) = 20$$

من هذه الحقيقة يتبين لنا جليا أن البابليين كانوا على معرفة جيدة بنظرية المثلث قائم الزاوية، المعروفة بنظرية فيثاغورث وقانون مساحة شبه المنحرف.

أعطى ثابت من قرية جزءا كبيرا من وقته للتطوير والتجديد في نظرية فيثاغورث التي تقول: «إن مربع الوتر في المثلث قائم الزاوية يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمين». وهذه النظرية نسبت للفيلسوف الإغريقي فيثاغورس الذي عاش فيما بين عامي 584 - 495 ق.م لأنه أول من برهن عليها بطريقة رياضية علمية. وقد ذكر الدكتور و.و. روس، برهانا لهذه النظرية في كتابه «ملخص تاريخ الرياضيات». ويجدر بنا هنا أن نقدم ملخصا لهذا البرهان:

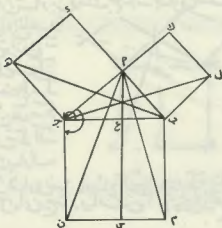


شكل (٣٩) - برهان نظرية فيثاغورس

البرهان :

- (١) المربع أ ب ح د = المربع ه و ج ل + ع ه ب و (مقل ٢٩)
 (٢) المربع أ ب ح د = المربع م و د س + المربع م ه أ س + ع ه ب و
 من (١)، (٢) : المربع ه و ج ل = المربع م و د س + المربع م ه أ س
 لذلك $\frac{ه و ج ل}{ه و د س} = \frac{م ه أ س}{م و د س}$

وقد قام ثابت بن قرة عام ٨٩٠م بتقحيح هذا البرهان بأن أدخل عليه بعض التعديلات كالآتي:



شكل (٤) - تنقيح ثابت بن قرة لبرهان نظرية فيثاغورس

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{عل ب د ه ا ن . ا ن م ا ج م // م لقطع ب د في نقطة ج (شكل ٤٠-٤١) } \\ \Delta \text{ د ب ه } \Delta \text{ ا د ن حيث ان} \\ \text{ج د د ب ه ج ا د ن} \\ \text{ب د ه ن} \\ \text{ا د ه ن} \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{مساحة المستطيل م ن د ه = مساحة } \Delta \text{ ا د ن حيث ان القاعدة المشتركة} \\ \text{المثلثة والمستطيل هي م ن د ه // ا م} \end{array} \right.$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \text{كذلك مساحة المربع د ا د ه = مساحة } \Delta \text{ د ب ه حيث ان القاعدة} \\ \text{المشتركة المثلثة والمربع هي د ه // د ب} \end{array} \right.$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \text{من المعادلات (1) . (2) . (3) نجد ان مساحة المستطيل م ن د ه = مساحة المربع} \\ \text{د ا د ه} \end{array} \right.$$

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \text{وبمثل } \Delta \text{ د ل ب ه } \Delta \text{ م ا ب حيث ان} \\ \text{ج ل ب ه = ج ا ب م} \\ \text{ل ب = ا ب} \\ \text{ب ه = م} \end{array} \right.$$

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \text{مساحة } \Delta \text{ ا ب م = } \frac{1}{2} \text{ مساحة المستطيل م م ج حيث ان} \\ \text{القاعدة المشتركة هي م ب . ا م // م ج} \end{array} \right.$$

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \text{مساحة } \Delta \text{ د ل ب = } \frac{1}{2} \text{ مساحة المربع د ل ب ا حيث ان} \\ \text{القاعدة المشتركة هي ل ب . د ل // ل ب} \end{array} \right.$$

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \text{من المعادلات (5) . (6) . (7) نجد ان مساحة المربع د ل ب ا = مساحة المستطيل} \\ \text{م م ج .} \end{array} \right.$$

وكذلك من المعادلتين (4) . (8) يتضح ان مساحة المربع د ل ب ا = مساحة المربع

اعتبر ثلاث حالات :

الحالة الأولى : إذا كانت $\angle C > 90^\circ$ متفرجة .

حيث أن مساحة المربع $ABCD$ = مساحة المستطيل $CE \times CD$

وأيضاً مساحة المربع $AD \times DE$ = مساحة المستطيل $CE \times CD$

وهذا أن $CE \times CD = CE \times CD$

$\frac{CE}{CD} = \frac{CE}{CD}$

لذلك فإن : $AB \times AD = CE \times CD$

$AB \times CD = CE \times CD$

$AB = CE$

لذلك فإن مساحة المربع $AD \times AB$ = مساحة المربع $ABCD$ = مساحة المربع

$CE \times CD$ = مساحة المستطيل $CE \times CD$.

الحالة الثانية : إذا كانت زاوية A حادة

اعتبر مكان نقطة E على AD عمودي على BC

وكما فعل في الحالة الأولى : $AB \times AD = CE \times CD$ = مساحة المستطيل $CE \times CD$

الحالة الثالثة : إذا كانت زاوية A قائمة

لاحظ أن نقطتي E على AD متطابقتان على نقطة D

لذلك فإن $AB \times AD = CE \times CD$ ، المثلث ABD قائم الزاوية D ، $AB \times AD = BD \times CD$

$AB \times AD = BD \times CD$ (1)

بالمثل $AD \times AB = BD \times CD$ ، $AD \times AB = BD \times CD$ ، $AD \times AB = BD \times CD$

$AD \times AB = BD \times CD$ (2)

من المعادلتين (1) و (2) نجد أن : $AB \times AD = AD \times AB$ ، $AB \times AD = AD \times AB$

$AB \times AD = AD \times AB$ ، $AB \times AD = AD \times AB$

$AB \times AD = AD \times AB$ ، $AB \times AD = AD \times AB$

قانون الكرخي لصناعة الشكل الرباعي

من المعروف أن هيرون الكندي الذي عاش في القرن الأول الميلادي قد توسل إلى تعيين صناعة المثلث بدلالة أطوال أضلاعه على الوجه التالي :

$$\text{الصناعة} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث $s =$ نصف محيط المثلث . $a, b, c =$ أطوال أضلاع المثلث .

وقد أدخل أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي (المتوفى عام ١٠٦٦ م) تعديلاً على هذا القانون بحيث صار ينطبق على أي شكل رباعي . حيث يتخذ قانون الكرخي الشكل التالي :

$$\text{صناعة أي شكل رباعي} = \sqrt{(a-b)(a+b)(c-d)(c+d)}$$

حيث $a, b, c, d =$ أطوال الأضلاع بالمعروف a, b, c, d .

مصادر (موضوعات) اقليدس :

من أمثلة التنقيحات والأضافات التي أدخلها علماء المسلمين على هندسة اقليدس «فرضية التوازي» التي لم يستطع اقليدس أن يثبتها أو يعرضها على هيئة نظرية، فعالج هذه المصادرة ابن الهيثم أولاً، ثم عمر الخيامي، ثم نصير الدين الطوسي في القرن السابع الهجري (الثالث عشر الميلادي)، مع أن محاولاتهم لا ينجحون إلا ببيان هذه المصادرة لم تبلغ ذروتها المطلوبة. ولكن كانت تلك الزاوية حافزاً قوياً ومفتاحاً واضحاً لبعض علماء الرياضيات في أوروبا في العصور الحديثة، لوضع هندسات أخرى «لا اقليدية» مثل هندسة «ريمان» (Bernhard Riemann) (١٨٢٦ - ١٨٦٦ ميلادية) و«هندسة نيكولاي لوبا شيفسكي» (Nikolai Lobachvsky) الذي عاش في القرن التاسع عشر أيضاً.

يعتبر عمر الخيامي علم الهندسة من المواضيع الأساسية اللازمة لدراسة أي

حققت من حقول الرياضيات، لذلك فإنه قد ركز على دراسة هندسة إقليدس التي شرحها وعلّق عليها علماء الرياضيات المسلمون. كما أنه أولى عناية خاصة لفهم ما قدمه الحسن بن الهيثم في برهانه للمصادرة (للموضوعة) الخامسة من مصادرات أو موضوعات إقليدس، ثم يبرهن جديد من ذلك المنطلق. ويذكر المؤلف أورثر جنتلمن في كتابه «تاريخ الرياضيات»: «أن عمر الخيامي حاول جهده أن يبرهن الموضوعة الخامسة من موضوعات إقليدس التي استعصت على من سبقه من علماء المسلمين. ولم تبرهن برهاناً صحيحاً إلى يومنا هذا». ويذكر بنا أن نذكر أن يوجين سمث نشر مقالته في مجلة (سكيتا ماثماتيكا) عن محاولة عمر الخيامي لبرهنة هذه الموضوعة الخامسة، والتي جاءت في رسالته «شرح ما أشكل من مصادرات كتاب إقليدس»، وكان يبرهن عمر الخيامي كالآتي:



شكل (٢٢) - برهان عمر الخيامي للمصادرة الخامسة لإقليدس

- المعطيات : كل من $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ ، $\angle D$ ، $\angle E$ ، $\angle F$ ، $\angle G$ ، $\angle H$ ، $\angle I$ ، $\angle J$ ، $\angle K$ ، $\angle L$ ، $\angle M$ ، $\angle N$ ، $\angle O$ ، $\angle P$ ، $\angle Q$ ، $\angle R$ ، $\angle S$ ، $\angle T$ ، $\angle U$ ، $\angle V$ ، $\angle W$ ، $\angle X$ ، $\angle Y$ ، $\angle Z$ ، $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ ، $\angle D$ ، $\angle E$ ، $\angle F$ ، $\angle G$ ، $\angle H$ ، $\angle I$ ، $\angle J$ ، $\angle K$ ، $\angle L$ ، $\angle M$ ، $\angle N$ ، $\angle O$ ، $\angle P$ ، $\angle Q$ ، $\angle R$ ، $\angle S$ ، $\angle T$ ، $\angle U$ ، $\angle V$ ، $\angle W$ ، $\angle X$ ، $\angle Y$ ، $\angle Z$.
- المطلوب : اثبات أن :-
- (١) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = \angle G = \angle H = \angle I = \angle J = \angle K = \angle L = \angle M = \angle N = \angle O = \angle P = \angle Q = \angle R = \angle S = \angle T = \angle U = \angle V = \angle W = \angle X = \angle Y = \angle Z$
 - (٢) المصنوع المقام من منتصف AB ينصف CD ويكون عمودياً عليه
 - (٣) $AB \parallel CD$
 - (٤) $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = \angle E + \angle G = \angle H + \angle I = \angle J + \angle K = \angle L + \angle M = \angle N + \angle O = \angle P + \angle Q = \angle R + \angle S = \angle T + \angle U = \angle V + \angle W = \angle X + \angle Y = \angle Z$
- الموصل : نعمل نقطتي B ، C وكذلك نعمل نقطتي A ، D
- $\triangle ABC$ ، $\triangle DCB$ ، $\triangle ABD$ ، $\triangle DCA$

$$1 \text{ ج د } = \text{ ب د}$$

$$1 \text{ ب مشتركة}$$

$$\text{ج د ا ب د} = \text{ج د ا ب د} = \text{زاوية قائمة} ,$$

$$\therefore \Delta \text{ ا ب د مطابق } \Delta \text{ ا ب د} , \text{ ومن ذلك ينتج أن}$$

$$1 \text{ د د } = \text{ ب د}$$

$$\Delta \text{ ا ج د} , \Delta \text{ ب د د فيهما} .$$

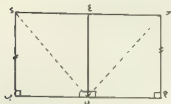
$$1 \text{ د د } = \text{ ب د}$$

$$1 \text{ ج د } = \text{ ب د} \quad |$$

$$1 \text{ ج د مشتركة} \quad |$$

$$\therefore \Delta \text{ ا ج د مطابق } \Delta \text{ ب د د} , \text{ ومن ذلك ينتج أن} :$$

$$\text{ج د ا ج د} = \text{ج د ب د د} \quad (\text{وهو المطلوب أولا}) .$$



شكل (٤٤) - شاح سرعة من الخيام للمبادرة الخاصة
لافنديس .

بالرجوع إلى شكل (٤٤) نجد أن :

$$\Delta \text{ ا ب د} = \Delta \text{ ب ن د فيهما} :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} * + ا ب = * د ب ا = قائمة \\ * ا ن = ب ب \\ * ا د = ب د \end{array} \right. \text{نمط}$$

$$\therefore \Delta * ا ن يطابق \Delta د ب ن$$

$$\text{لذا } * د ن = * ن د$$

$$* ا ن د = * د ن ب \leftarrow * د ن ع = * ع ن د$$

$$\Delta * د ن ، \Delta د ع ن ، \Delta ع ن جميعا :$$

$$* د ن = * ن د$$

$$\left\{ \begin{array}{l} * د ع ن = * ع ن د \\ * ع ن = * ن ع \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} * ع ن = * ن ع \end{array} \right.$$

$$\therefore \Delta * د ن يطابق \Delta د ع ن$$

$$\text{لذا } * د ع ن = * ع ن د ، \text{ ولكن } * د ع ن + * ع ن د = ١٨٠$$

$$\therefore * د ع ن = ٩٠$$

$$\text{وكذلك } * ع د = * د ع من نطاق المثلثين * د ن ، * ع ن .$$

$$\therefore * ع د = * د ع ، \text{ ويكون مجموعا عليه (المطلوب ثانيا) .}$$

$$\therefore * د ع ن = ٩٠$$

$$\therefore * ع ن د = ٩٠$$

$$\therefore * د ع ن = * ع ن د = * ن ع د = * ع د ن$$

$$\therefore * د د // ا ب \text{ (المطلوب ثانيا) .}$$

البرهان

$$ا د اكبر من ن ع \leftarrow * ا د ع زاوية حادة ، * ن ع د زاوية حادة$$

منسجمة ، وهذا يشاكل المعروف من (٣) ان * ن ع د = ٩٠

الطوسي حاول بكل جدارة أن يبرهن على الموضوعة الخامسة من موضوعات اقليدس فكانت محاولته بدء عصر حديد في علم الرياضيات الحديثة، هذا انصبت عقليته العظيمة على برهانها، وهو (أن مجموع زوايا المثلث تساوي زاويتين قائمتين)، فقبل أن يبدأ نصير الذي في برهانه للموضوعة الخامسة لأقليدس حاول أن يعطي مقدمة عن التقارب والتباعد، فمثلا لو أخذ المرء مستقيمين أ ب، د ح كما في شكل (٤٥).



شكل (٤٥) - مقدمة برهان عصر التنوير للبرهان الخوارزمي

ونسط الأسماء هـ و ج هـ ل الخ على د هـ من النقاط هـ و ج هـ
والواقعة على المستقيم أ ب كما في شكل (٤٥) بحيث ينطبق الآخر

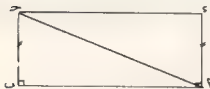
■ * ب هـ و ج هـ ل الخ على د هـ من النقاط هـ و ج هـ ■

■ * ج هـ و ج هـ ل الخ على د هـ من النقاط هـ و ج هـ ■

هذا يتضح أن الزوايا المتجاورتين على المستقيم أ ب غير متساويتين.
فتكسر الروايات التي بانحاء ب روايات حادة، والروايات التي بانحاء أ روايات مسطحة
وتكسر الأعمدة أطول كما كانت بانحاء أ، د وتصغر ان كانت بانحاء ب، ج،
أي أن المسافة بين المستقيمين أ ب، د ح تصغر كلما توعدت في الاتجاه
ب، ج، وانعكس صحيح، أي أنه: لو كانت الروايات الحادة بانحاء التقاطعين أ، د،
فإن التقارب سيكون بانحاء التقاطعين أ، د، والتباعد بانحاء التقاطعين ب، ج.

بعد هذه المقدمة بدأ نصير الذي الطوسي في برهانه الذي صار متداولاً في
كتب الهندسة التي تدرس في جامعات العالم، وبأدراك بل يكاد يستحيل أن

يُحصل على كتاب بعنوان الهندسة الموقوفة (الهندسة المبدئية) دون التعرض
 لاسهام بصير الذي الطوسي في هذا المصنف بدو الطوسي برهانه بالشكل
 الآتي :



شكل (٤٦) - برهان الطوسي للفرعية الشوازي .

• رسم عمودين د أ، ح ب على المستقيم أ ب من النقطتين أ، ب بحيث أن
 المستقيمين د أ، ح ب يكونان متساويين، ويقعان على نفس الجهة من
 المستقيم أ ب.

• أوصل النقطتين د، ح.

• حاول أن يبرهن أن الزاويتين هـ د أ، ب حـ د قائمتان

• فرض أن ~~حـ د أ~~ ليست زاوية قائمة فهي إما أن تكون -

(أ) زاوية حادة

أو (ب) زاوية منفرجة.

• إذا كانت زاوية د حـ ب زاوية حادة، فالزاوية حـ د أ ستكون زاوية معرجة،

وهذا بالطبع يؤدي إلى أن يصير المستقيم ب ح أطول من المستقيم أ د،

ولكن هذا يناقض ما افترضه، فالزاوية د حـ ب ليست زاوية حادة

• إذا كانت الزاوية د حـ ب زاوية معرجة، فالزاوية حـ د أ ستكون زاوية حادة،

فينتج أن المستقيم أ د أطول من المستقيم حـ ب، وهذا أيضا يناقض

ما افترضه، فالزاوية د ح ب ليست زاوية مفرجة، أي يجب أن تكون زاوية قائمة

وبما سبق ذكره نوصف بصوري أن رؤيا الأربع بشكل الرباعي المذكور جميعها رؤيا قائمة. وبالتالي فإن مجموع Δ ب ثلث أ د ح مساوي لزاويتين قائمتين وأن Δ أ ب ح = Δ د ح ب مصادف كما سنع الطوسي أن مجموع رؤيا ثلث $\frac{1}{3}$ مجموع رؤيا الشكل الرباعي أ ب ح د.

هذا الزعم استنسخ بصور اثنين بصوري أن يبرهن على أن «مجموع رؤيا أي مثلث مساوية لزاويتين قائمتين» وهذا ينص على ما يكفى موضوعه الخامسة من موضوعات «قياس» لـ محمد بن بصوري براهان الموضوع الخامسة لأقليدس لها طبع أصلي، فلم يسبق لأحد قبله أن لاحظ محاولة وقد دعي مسكزي هذا شكل الرباعي نفسه، ونحن أن هذا المربع يجب أن يسبب أولاً لعمر الخيامي، الذي اكتشفه قبل مسكزي بكثير من خمسة مائة عام والخير بالذكر أن هذا المربع كان له أهمية ناهية في هندسة غير (هندسة إقليدية)، لذا يجب أن نذكر أن عمر الخيامي وبصور بن بصوري هم اللذان وضعوا حجر الأساس للهندسة غير الإقليدية (هندسة هذلولية)

يذكر عمر رضا كحانة في كتابه «لعمري الحجة في حضور الإسلام» «أنه يمكن القول بأن الطوسي استمر على غيره في عونه في الهندسة، لخاصته بالتقاضي الأساسية التي تقوم عليها الهندسة المستوية فيما يتعلق بالتوازيات، وقد أتم بها، كما حرب أن يبرهن نفسه متوازيات هندسية وقد وفق في ذلك ومعظم تراهيه على مسائل هندسة محال لا بد من سبقه، فصاح كل ذلك في شكل متكرر يسبق به، وهو يبرهن من هذه وجهة مفهومة على معاصريه، وأضاف خلال مسهر في كتابه «تاريخ العرب في الحصار» لأوروبا نهاية عصور الظلام وأنشأ الحصار الحديث» «أن بصوري سبب بنفس هندسة إقليدس، فعلى وبرهن على كثير من المصريات في كتاب «تحرير أصول إقليدس»، وفي

الرسالة الثانية للطوسي أثر في تقدم بعض النظريات الهندسية وقد نشر جون واليس هذه البحوث باللاتينية في سنة ١٦٥٩م.

وحاء من بعد نصير الدين الطوسي العالم الرياضي الانجليزي صاحب الشهرة العظيمة في العرب حاز واليس، الذي عاش فيما بين عامي ١٦١٦ و ١٧٠٣م، والذي درس بكل تجمع برهان نصير الدين للموضوعة الخامسة من موضوعات قبيدس، واعترف في دراسته بأن نصير الدين الطوسي عالم رياضي له فضل كبير في بدء الهندسة العوقية (الهندسة المثلثية)، وظهور عصر الرياضيات الحديثة كما ذكر الأستاذ هوارد ايمر في كتابه «تاريخ الرياضيات» «ان جرولا سكيري الايطالي - الذي عاش فيما بين عامي ١٦٦٧ و ١٧٣٣م - كان أستاذًا في علم الهندسة والرياضيات في جامعة باثيا في إيطاليا وأسمى بأبي الهندسة عبر الاقلدية أو الهندسة العوقية (الهندسة المثلثية)، وبما لا يقل الشك أنه اعتمد اعتداد كليًا على عمل نصير الدين الطوسي في هذا المجال

ومع الأسف فان علماء الرياضيات في العصر الحديث اذا تكلموا عن الهندسة العوقية (الهندسة المثلثية) قرروا اسمها بأسماء بعض علماء الرياضيات العربيين ذوي الشهرة الكبيرة في حقل الرياضيات، مثل بيكولاي لوباشيفسكي (Lobachevsky) الروسي الذي عاش ما بين عامي ١٧٩٣ و ١٨٥٦م، وكارل جاولس (Gauss) الألماني الذي عاش ما بين عامي ١٧٧٧ و ١٨٥٥م، وليفغان بوليائي الهجري الذي عاش ما بين عامي ١٨٢٦ و ١٨٦٦م، وسوا العلماء الذين سبقوا هؤلاء بقرون عدة، والذي كان لهم أثر مرموق في هذا الحقل مثل الحسن ابن الهيثم وثابت بن قرة، ونصير الدين الطوسي، حيث كانت مؤلفاتهم تدرس في مدارس وجامعات العرب والشرق حتى القرن الثاني عشر الهجري (الثامن عشر الميلادي). ويجب أن لا ننسى على القارئ أن الهندسة عبر الاقلدية (الهندسة المثلثية) لها في وقتنا الحاضر أثر عظيم في دراسة العلماء الطبيعي وتصميمات النظرية السبية.

بعض جهد الخوارزمي في حساب المساحة .

عرف الخوارزمي لوحدة المستعملة في المساحات، واستخدم «التكسير» ويقصد بذلك المساحة، سواء كانت سطحية أو حجمية، كما تطرق إلى إيجاد مساحات بعض السطوح المستقيمة الأضلاع، والأجسام، والدائرة، ونقطعة، والمهرم الثلاثي والزائعي، وغيرها، وبالكثرة كذلك استعمل نسبة التقريبية وفيها $\frac{22}{7} = \pi$ ، أو $\sqrt{10}$ ، أو $\frac{62832}{20000}$ ، ولقد نرى عدم الخير باستعماله بعض الأفكار الجيدة لمعرفة المساحة، واختار مثالا يوضح به مدى استخدام النظريات الجيدة، وهو:

«فإن قيل أرض مثلثة من جانبها عشرة أذرع وعشرة أذرع وقاعدة اثنا عشر في جوفها أرض مربعة كم كل جانب من المربعة، فقياس ذلك أن تعرف عمود المثلثة، وهو أن تصرف نصف القاعدة - وهو ستة - في مثلثه، فيكون ستة وثلاثين فانقصها من أحد الجانبين الأقصرين مصروبا في مثله - وهو مائة - يبقى أربعة وستون، فحدد جنودها ثمانية وهو العمود، وتكسرها ثمانية وأربعين ذراعا، وهو صرحت العمود في نصف القاعدة وهو ستة فحصلنا أحد جوانب المربعة ستة، وصرها في مثله، فصدر مالا فحفظه، ثم علم أنه قد بقي له مثلثان على حتمي المربعة ومثلثة فوقها، فأما مثلثان اللتان على حتمي المربعة فهما متساويتان، وعموداهما واحد، وهما على زاوية قائمة، فتكسرها أن تصرف شيئا في ستة لا نصف شيء، فيكون ستة أشياء إلا نصف مار، وهو تكسير اثنين جميعا اثنين هما على حتمي المربعة فأما تكسير مثلثة العليا فهو أن تصرف ثمانية غير شيء - وهو العمود - في نصف شيء، فيكون أربعة أشياء إلا نصف مار، فهذا هو تكسير المربعة وتكسير لثلاث مثلثات وهو عشرة أشياء تعد ثمانية وأربعين، هو تكسير مثلثة العظمى، فاشئ، الواحد من ذلك أربعة أذرع وأربعة الأحاس ذراع، وهو كل جانب من المربعة، وهذه صورته».

في المثال السابق استخدم الخوارزمي مساحة المثلث ومساحة المربع بطريقة

فيثاغورث لإيجاد المطلوب، فلو حاولنا أن نصنع طريقة حله في لمة العصر هذا، لقلنا: إيجاد طول ضلع المربع المرسوم داخل المثلث المتساوي الساقين والذي طول قاعدته = ١٢ ذراعاً، وطول كل من ضلعيه الآخرين ١٠ أذرع.

• نرسم المثلث ABC بحيث تكون قاعدته $BC = 12$ ، وقلعه $AB = AC = 10$.
(شكل ١٧)

• نرسم المربع $KLMN$ داخل المثلث ABC .
• نرسم الارتفاع AD .

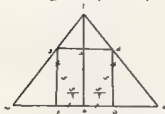
• $AB = 10$ ، $BC = 12$ ، $AD = 8$ نظرية فيثاغورس

ولكن $AD = 8$ لأن $\triangle ABC$ متساوي الساقين

$$AD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \frac{AD}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \frac{AD}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$



شكل (١٧) - إيجاد طول ضلع المربع المرسوم داخل المثلث المتساوي الساقين.

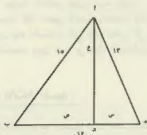
• وبما أن $\triangle ABC$ متساوي الساقين ، AD عمودي على القاعدة BC .

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \frac{AD}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

المرى أن طول ضلع المربع $KLMN$ هو ٦.

$$\begin{aligned}
 & \therefore 10 = 6 + 4 = 10 \\
 & \text{مساحة } \triangle ا ب د = \text{مساحة } \triangle ا ب ح + \text{مساحة } \triangle ا ب م + \text{مساحة } \triangle ا ب ن و \\
 & \text{مساحة المربع ك م ن و} \\
 & \therefore \left[\left(\frac{1}{4} - 6 \right) \times \frac{1}{4} \right] + \left[\left(\frac{1}{4} - 6 \right) \times \frac{1}{4} \right] + (8 \times 12) \times \frac{1}{4} \\
 & \quad \left[\frac{1}{4} \right] + \left[(10 - 8) \times \frac{1}{4} \right] \\
 & \quad \frac{1}{4} + (10 - 8) \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} - 6 \right) \times \frac{1}{4} = 18 \\
 & \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{4} - 10 = 18 \\
 & \quad - 10 = 18 \\
 & \therefore 10 = \frac{1}{4} = \text{طول ضلع المربع}
 \end{aligned}$$

كذلك أورد الخوارزمي مثالا آخر يبرز فيه الاستفادة من علم الجبر، عندما نحاول أن نعرف مساحة المثلث، لذا اختار الخوارزمي إيجاد مساحة المثلث إذا عرفت طول أضلاعه الثلاثة. فعلى سبيل المثال: افترض أن هناك مثلثاً أطوال أضلاعه هي (١٣، ١٤، ١٥)، والمطلوب إيجاد مساحته (شكل ٤٨).



شكل (٤٨) - إيجاد مساحة المثلث بمعرفة أطوال أضلاعه

٢ - مساحات الأشكال رباعية الأضلاع.

٣ - مساحات المضلعات المنتظمة حتى ١٦ ضلعاً، وتوجد جداول تعطي هذه المساحات، مثل ما جاء منها بكتاب «مفتاح الحساب» للكاشي (الباب الثالث من المقالة الرابعة).

٤ - مساحات الأشكال الدائرية والحلقات والقطاعات والأشكال المحدودة بأقواس دائرية كالأشكال الهلالية والنعلية والأهليلجية والشمسية^(١).

٥ - مساحات الأشكال الهندسية المسوية المكونة من تركيبات من الأشكال المتقدمة.

(ب) مساحات السطوح للأجسام المنتظمة كالاسطوانات والمخروطات والمشورات والكرات.

(ج) حجوم الأجسام المنتظمة مثل :

١ - الاسطوانات والمخروطات التامة والناقصة.

٢ - الكرات والقطع الكروية.

٣ - الأجسام المضلعة.

٤ - الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره^(٢)، وينسب هذا العمل أيضاً للحسن بن الهيثم (٦٥ / ٩٦٦ - ٨ / ١٠٣٩م).

(د) مساحات وحجوم الأشكال المعمارية :

يفرد غياث الدين جمشيد الكاشي المتوفى عام (١٤٣٦م) - على سبيل المثال لا الحصر - جانباً من كتابه «مفتاح الحساب»^(٣) لحساب مساحات وحجوم أشكال معمارية متنوعة، نذكر منها :

- ١ - العقود نصف المستندية.
- ٢ - العقود ذات القطوع.
- ٣ - العقود المدية.
- ٤ - العقود المكونة من ثلاثة أقواس.
- ٥ - القباب الكروية، وأنصاف هذه القباب.
- ٦ - القباب المكونة من أهرامات مضلعة.
- ٧ - الأنواع المختلفة من المحراب.

ويرد الكاشي حساباته بمداول طبعها نتائج هذه الحسابات.

الهوامش

- (١) راجع مثلا «علامة الحساب» ليهاب الدين العارفي: الباب السادس.
- (٢) (Paraboloid).
- (٣) الباب التاسع من المقالة الرابعة.